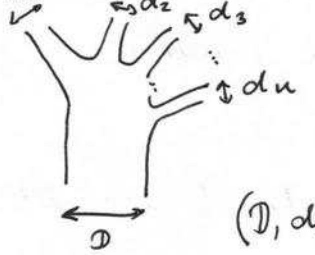
A Duna deriváltja

A Gesztenyefa Probléma

A délelőtti strandos feladatok közben jutott eszünkbe ez a gondolat: egy elágazásban tulajdonképpen az összes keresztmetszet nem változik, hiszen ugyanazok a rostok mennek tovább, csak más-más irányba. Ezen felbuzdulva meglátogattuk a park fáit és egy csomópontba befutó és kifutó ágak kerületeit mértük.



Ha állításunk igaz, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = D^2.$$

(D, d_i : kerületek, de $D, d_i \sim R, r_i$ sugarakkal)

Méréseink a strandon:

D (cm)	220	173	161	125
$d_{1,2,\dots,n}$ (cm)	100 170	49 155	70 48 149	55 100 23 34,5 45 34,5
$k = \frac{\sum d_i^2}{D^2}$	0,804	0,883	1,14	1,15
	↓ fűz$_1$	↓ fűz$_1$	↓ platán$_1$	↓ platán$_2$

(A két fűzfacsomópont ugyanazon a fán, de a két platán-cs.p. különböző (!) fán volt.)

Ezek alapján elméletünket a következőképp módosítottuk:

$$\sum d_i^2 = k D^2$$

ahol k fafajtól függő állandó.

/A mérés elvégzéséhez az antievolúció (vissza a fára) módszert is igénybe kellett venni./

Délutáni méréseink:

Választott fánk: a legnagyobb (középső).

A felvett csomópontok:

D (cm)	[illegible]	43,5	30,0	22,0	9,2	5,0
d_i (cm)	119 106 167 207	33,5 31,0	28,5 14,0	10,0 12,1 14,0 13,2	5,4 8,14	4,1 3,7
k	0,687	1,101	1,120	1,274	1,129	1,220
	(1)	(1)	(2)	(2)	(2)	(2)

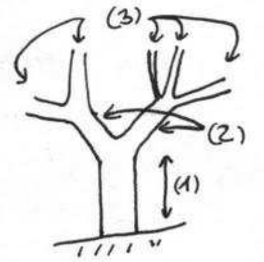
Az (1) oszlopokat a nagy fán, a (2)-eseket az udvarban lévő „nagy" gesztenyefát használtuk. A legelső oszlop a törzs és a 4 nagyon nagy ág: erre nem teljesült a törvényünk, de úgy tűnik, a többi (nem törzs) ágra (vastagságtól függetlenül) igaz a feltevésünk. Tehát gesztenyefára az elágazási ágfelület-sokszorozódási tényező:

$$k_{gyesztenye} \approx 1{,}169.$$

Vegyük észre, hogy ez a k tényleg megadja a csomópontból kimenő és abba bemenő összes ágkeresztmetszet arányát.

Az n-edrendű ágakról.

A gesztenyefa szerkezetére a következő modellt akarjuk ráerőszakolni:



A számok az ágak „rendje".

Az (1) → (2) csomópontra nem, de az összes többire igaz a csomóponti törvény. Jelölje A_i az (i)-edrendű ágak összfelületét!

Értelemszerűen:

$$A_{i+1} = k \cdot A_i.$$

Az (~~ágdarabokat~~) ágszakaszokat hengernek tekintjük.

Ha ismernénk az (i)-edrendű ágak átlagos hosszát (jel: $\ell^{(i)}$) akkor a fa teljes térfogata: $V = \sum_{i=1}^{n} A_i \ell^{(i)}$.

Újabb mérések...

Ismerni kéne a maximális rendszámot. Találomra kiválasztottu[nk] néhány ág-útvonalat a talajtól a levélig és feljegyeztük a rendszámot:

10; 7; 7; 11; 10; 8; 8; 8; 12; 10.

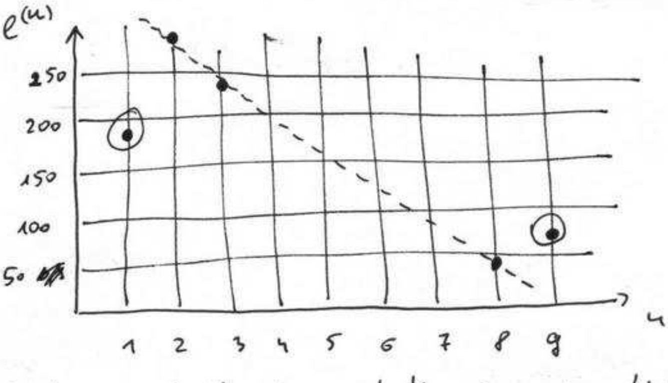
n értékének az átlagot (9,1) tekintettük: $n \approx 9$.

Mérjük meg $\ell^{(i)}$ értékeit! $\ell^{(1)}$ és $\ell^{(2)}$-t meg tudtuk mérni, $\ell^{(3)}$-ból néhány értéket felvettünk, továbbá a fa végét (9) ágnak tekintve $\ell^{(9)}$ és $\ell^{(8)}$-ból sok értéket. Felhasználtuk az udvari kis gesztenyét is: feltételezve, hogy a szerkezet ugyanaz a kis fa végén, mint a nagy fa végén, a kis fán is tudtuk $\ell^{(9)}$-et, $\ell^{(8)}$-at mérni:

								Átlag
$\ell^{(1)}$	180							180
$\ell^{(2)}$	150	190	350	425				279
$\ell^{(3)}$	160	400	200	200	200			232
$\ell^{(8)}$	43	48	41	49				45,25
$\ell^{(9)}$	69	80	32	54	40	77	69	60,1

$\to$ (cm)

Ezeket vázlatosan ábrázolva:



A struktúra elejét és végét leszámítjuk, közte pedig az $i \mapsto \ell^{(i)}$ függvényt (jobb híján) lineárisnak vesszük.

Az egyenesillesztés eredménye:

$$\ell^{(i)} = a + b\,i$$

$\hookrightarrow b = -38{,}4$

$\hookrightarrow a = 352.$

A végső megoldás

Foglaljuk össze a fa szerkezetére vonatkozó összefüggéseket:

$$\ell^{(1)} = 1{,}80 \text{ m} \quad ; \quad \ell^{(9)} = 0{,}601 \text{ m}$$

$$\ell^{(i)} = 3{,}52[\text{m}] - 0{,}384[\text{m}] \cdot i \qquad 2 \leq i \leq 8 \text{ -ra}$$

$$A_1 = 1{,}119 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0{,}754 \text{ m}^2 \quad (\text{itt még } \forall \text{ ágat lemértünk})$$

$$A_i = k A_{i-1} \qquad 2 < i \text{ -re.}$$

Ezek után elvégeztük az összegzést:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\ell^{(n)}$	1,80	2,75	2,37	1,98	1,60	1,22	0,83	0,45	0,60	→ m
A_n	1,119	0,754	0,881	1,03	1,21	1,41	1,65	1,92	2,25	→ m²

$$V = \sum_{i=1}^{9} \ell^{(i)} A_i = \underline{\underline{15{,}44 \text{ m}^3}}$$

A sűrűséget $800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$-nek becsülve: $\underline{\underline{m = 12{,}3 \text{ t}}}$

A levelek száma

Tudjuk, hogy $A_9 = 2{,}25 \text{ m}^2$. Megmértük néhány (9) ág átmérőjét: 0,88 ~~cm~~; 0,99 ~~cm~~; 1,09; 0,91; 0,90 cm.

Az átlagos (9)-ág felület: $a = 0{,}715 \text{ cm}^2$.

Vagyis $N = \frac{A_9}{a} = 3{,}15 \cdot 10^4$ db (9) ág van a fán.

Megszámoltunk néhány (9)-ágon mennyi levél van:

15; 17; 19; 10; 15; 14; 15; 16; 13; 14.

Átlag: $n = 14{,}8$.

Azaz a fán $Nn = \underline{\underline{465\,000}}$ levél van.